Программа обязательных курсов

Программа писалась с учётом того, что в первом семестре в каждом модуле 8 учебных недель, а во втором — 10. Предполагалось также, что курсы логики и теории вероятностей нельзя значительно сократить. Деление на пункты в каждом модуле, как правило, отвечает за несколько разные сюжеты и весьма условно. Звёздочками обозначены темы, которые при нехватке времени можно пропустить.

В составлении программы участвовали: Давыдов Андрей, Деев Родион, Завьялов Богдан, Калмынин Александр, Коновалов Николай, Макарова Светлана и Пирожков Дмитрий.

Содержание

I Первый курс

I.1 Первый модуль

Логика

1. Множества. Операции над множествами. Функции. Отношения порядка и эквивалентности, фактормножества. Мощности множеств, теорема Кантора — Бернштейна, формула включений-исключений. Вполне упорядоченные множества. Индукция. Аксиома выбора, теорема Цермело и лемма Цорна.

Комментарий: Курс логики поделён на две части в силу того, что во втором модуле он совершенно не усваивается. Возможно, от перенесения его в четвертый модуль станет несколько проще (будет на две недели больше, и люди будут уже более привычны к абстракциям).

Алгебра

1. Введение. Определение основных алгебраических структур: группы, кольца, поля. Комплексные числа и кольца вычетов.

2. Коммутативные кольца (начало) и поля. Целые числа, многочлены и ряды над коммутативным кольцом, кольца функций. Гомоморфизмы колец. Деление с остатком и КТО в целых числах и кольце многочленов. Евклидовы кольца, НОД, алгоритм Евклида, простые и неприводимые элементы. Неприводимые многочлены, корни многочленов, интерполяционный многочлен Лагранжа, теорема Безу и теорема Виета. Идеалы, факторкольца, кольца главных идеалов, простые и максимальные идеалы. Кольца вида $k[x]/(f)$, конечные поля и гомоморфизм Фробениуса. Поле частных целостного кольца, поле рациональных чисел и поле рациональных функций. Факториальность, всякое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов, а всякое кольцо главных идеалов факториально. Целые гауссовы числа.

3. Группы (начало). Примеры: абелевы, циклические, диэдральные группы, группы платоновых тел. Перестановки и знакопеременные группы, разложение перестановки на независимые циклы, транспозиции. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, ядра, факторгруппы, прямые произведения. Теорема о гомоморфизме, теорема Лагранжа. Действие групп, стабилизатор, орбита, формула Бёрнсайда.

Комментарий: О линейной алгебре см. ниже в комментарии к соответствующему курсу. В этой программе цель первого семестра алгебры — изучить базовые понятия, относящиеся к кольцам и группам. Они нужны буквально везде. За счёт места, освободившегося от вынесения линейной алгебры в отдельный курс, можно рассказывать многие вещи менее сжато и значительно раньше, чем обычно. В частности, теорему о ЖНФ можно доказать в первом же семестре через классификацию конечно порождённых модулей над кольцами главных идеалов, без траты времени и сил на плохо воспринимаемые доказательства через манипуляции с матрицами или резольвенты Лагранжа. Опыт последних лет показывает, что эти доказательства никто не воспринимает.

Линейная алгебра и геометрия

1. Определения и примеры векторных и аффинных пространств. Линейная зависимость, линейные оболочки, базисы, размерность, координаты, подпространства. Определения привычных всем прямых и плоскостей как аффинных пространств, аффинизация и векторизация.

2. Линейные отображения, образы и ядра, ранг линейного оператора, проекторы. Двойственное пространство и двойственный оператор, аннуляторы, ядро и образ двойственного оператора, теорема о ранге. Матричный формализм, метод Гаусса. Решение систем линейных уравнений.

3. Ориентированный объём. Знак перестановки. Полилинейные косые формы. Определители. Миноры, разложение определителя по строке или столбцу. Присоединённая матрица, формула для обратной матрицы и правило Крамера.

Комментарий: Знание линейной алгебры требуется буквально во всех предметах. В частности, ко второму семестру анализа нужно выработать четкое представление о том, что линейные объекты изучать достаточно просто, и именно поэтому мы всевозможные вещи стараемся линеаризовать. Поэтому с целью более глубокого и раннего освоения курс линейной алгебры вынесен из алгебры. Он замещает собой геометрию в первых модулях в силу того, что, опять же, без знания линейной алгебры далеко от школьной геометрии не уйти. В доказательстве каких-то геометрических результатов элементарными методами (не используя имеющейся развитой науки) мы не видим особого смысла. Соответственно, вся геометрическая часть курса вынесена в самый конец, чтобы при её рассказе линейная алгебра можно было смело использовать. Стоит отметить, что для понимания многомерного анализа и, тем более, анализа на многообразиях, критически важно понимание того, что такое двойственное пространство и свертка вектора с ковектором (без этого будут большие проблемы с пониманием того, что означают символы $\mathrm{d}x$ и $\frac{\partial}{\partial x}$). Поэтому эта тема должна быть разобрана в курсе линейной алгебры очень подробно и обязательно как-то обыгрываться в листках.

Анализ

1. Вещественные числа как пополнение рациональных. Предел последовательности, его свойства, лемма о двух милиционерах. Нотация Ландау (символы O и o). Фундаментальные последовательности, критерий Коши, теорема Вейерштрасса об ограниченной монотонной последовательности. Число e.

2. Пределы функции в точке, непрерывные функции, замечательные пределы, лемма Больцано — Вейерштрасса, теорема Больцано — Коши.

3. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}$. Связность, компактность, их сохранение при непрерывных отображениях. Теорема Вейерштрасса о функции на компакте. Равномерная сходимость, равномерная непрерывность. sup-норма на пространстве непрерывных ограниченных функций.

I.2 Второй модуль

Комбинаторика и дискретная математика

1. Перечислительная комбинаторика. Биномиальные коэффициенты, двенадцатеричный путь. Мультиномиальные коэффициенты, разбиения и диаграммы Юнга.

2. Производящие функции и исчисление формальных рядов: обращение, замена переменной, производные, первообразные, экспонента, логарифм, бином (с произвольным показателем). Линейные рекурренты. Пример использования в комбинаторике: производящие функции путей в графах.

3. Вычисления с многочленами: симметрические многочлены (мономиальный базис, элементарные, полные и Ньютоновские многочлены, выражения их друг через друга, рекуррентные формулы), результанты и дискриминанты.

*3. Частично упорядоченные множества и общая формула обращения Мёбиуса. Разбиения и пентагональная формула Эйлера.

Комментарий: От курса дискретной математики оставлено лишь то, что кажется нам базовым материалом. Симметрические многочлены вставлены сюда потому, что некоторые формулы на них доказываются с помощью вычислений с формальными рядами. В алгебре эта тема всегда подается немотивированно и студенты обычно недовольны, здесь это будет хотя бы примером на использование только что изученной техники.

Алгебра

1. Коммутативные кольца (продолжение). Повторение: простые и максимальные идеалы, неприводимые элементы. Операции над идеалами, КТО в коммутативном кольце. Лемма Гаусса, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Неприводимые многочлены: редукция коэффициентов и признак Эйзенштейна.

2. Модули над коммутативными кольцами. Подмодули и фактормодули, теорема о гомоморфизме. Контрпримеры к теоремам о базисе и существованию дополнительного подмодуля. Свободные модули, задание модуля образующими и соотношениями. Линейные отображения и матричный формализм, алгебра матриц, тождество Гамильтона —Кэли. Метод Гаусса над кольцом главных идеалов. Строение конечно порождённых модулей над кольцами главных идеалов: взаимные базисы модуля и подмодуля, элементарные делители и инвариантные множители, разложение модуля в сумму свободного и циклических. Строение конечно порождённых абелевых групп.

3. Пространство с оператором. Собственные значения и собственные векторы оператора, аннулирующие многочлены. Характеристический и минимальный многочлены. Цикловой тип нильпотентного оператора, критерии диагонализуемости оператора, коммутирующие операторы, Жорданова нормальная форма. Разложение Жордана для линейного оператора. Функции от операторов.

4. Группы (продолжение). Простые группы, простота A_n при $n \geqslant 5$. Автоморфизмы групп, внутренние автоморфизмы, полупрямые произведения. Теоремы Силова. Свободные группы и задание групп образующими и соотношениями. Коммутатор, коммутант, композиционный ряд группы. Теорема Жордана — Гёльдера.

Комментарий: Четвёртую тему при нехватке времени можно частично перенести в третий модуль. Свободные группы и задание групп образующими и соотношениями почему-то вплоть до этого года не входили в курсы алгебры. Между тем, они очень нужны в топологии, а свободная группа — один из первых примеров объектов, которые удобно определять универсальным свойством.

Линейная алгебра и геометрия

1. Билинейные формы. Евклидово скалярное произведение. Матрица Грама, неравенство Коши — Буняковского — Шварца. Ортогоналы и проекции, длины и углы. Ортогональная группа. Произвольные билинейные формы, корреляции, критерии невырожденности, сопряжение операторов. Симметрические билинейные формы соответствуют квадратичным формам. Теорема Лагранжа, разложение пространства с невырожденной симметрической билинейной формой в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств, сигнатура вещественной квадратичной формы. Кососимметрические формы: симплектический базис, лагранжевы подпространства, симплектическая группа, *пфаффиан.

2. Примеры из геометрии. Ортогональная группа порождается отражениями, группы движений плоскости и пространства. Аффинная группа как полупрямое произведение группы сдвигов на группу невырожденных линейных отображений. Вычисление длин в евклидовой геометрии. Барицентрические координаты в аффинном пространстве, центр масс, выпуклые оболочки, *выпуклая геометрия и многогранники.

Комментарий: При нехватке времени, второй пункт вполне можно перенести на следующий модуль, в котором есть немного свободного времени. В этом модуле главное — хорошо разобраться со всей алгебраической частью, в частности, допройти что-то из первого модуля, в котором может немного не хватить времени.

Анализ

1. Ряды, их сходимость. Теорема Лейбница о знакочередующихся рядах. Дискретное преобразование Абеля. Признаки Гаусса, Абеля и Дирихле. *Суммирование по Чезаро.

2. Признаки Даламбера и Коши. Степенные ряды, радиус сходимости. Функциональные ряды и их сходимость.

3. Дифференцируемые функции, теоремы Лагранжа и Ролля, основные свойства производной. Правило Лопиталя. Дифференцирование функциональных рядов.

4. Ряд Тейлора, аналитические функции, построение основных элементарных функций.

I.3 Третий модуль

Алгебра

1. Эрмитовы пространства. Аналоги понятий из евклидовой геометрии. Унитарная группа. Нормальные операторы в эрмитовом пространстве, их диагонализуемость в ортогональном базисе, следствия для самосопряжённых, антисамосопряжённых и унитарных операторов. Полярное разложение невырожденного оператора. Комплексификация и овеществление. Вещественные самосопряжённые, антисамосопряжённые и ортогональные операторы. Комплексные и вещественные структуры.

2. Тензорное произведение. Полилинейные отображения. Определение тензорного произведения модулей над кольцом (через универсальное свойство), базис тензорного произведения свободных модулей, канонические изоморфизмы, пример: тензорные произведения абелевых групп. Тензорное произведение операторов. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры векторного пространства, симметрические и кососимметрические тензоры, симметризация и альтернирование, свёртки, изоморфизмы между пространствами (косо)-симметрических полилинейных форм, (косо)симметрических тензоров и симметрической (соответственно, внешней) алгеброй над полем характеристики ноль.

Комментарий: В этом модуле линейная алгебра возвращается в курс алгебры, так как иначе на геометрию в соответствующем курсе совсем не останется времени. В последние годы эрмитовы пространства и тензоры проходили очень сжато за половину четвертого модуля, что нам кажется очень странным, т. к. темы здесь очень базовые и они активно используются в дальнейшем. Мы предлагаем потратить на них, с учётом того, что что-то может перенестись из второго модуля, примерно в два раза больше времени, чем обычно. Для усвоения анализа на многообразиях, например, критически важно понимание тензорной, симметрической и внешней алгебр. Сейчас на матфаке их проходят очень поверхностно, не объясняя даже разницы между элементами симметрической алгебры и симметрическими тензорами. Совсем не упоминаются свёртки (спаривания), которые чрезвычайно важны для понимания того, как отождествляются различные пространства.

Линейная алгебра и геометрия

1. Проективная геометрия. Проективное пространство, однородные координаты, аффинные карты. Двойное отношение и дробно-линейные преобразования прямой, гармонические четвёрки точек. Проективная линейная группа, проективная двойственность. Проективные и аффинные квадрики. Конические сечения. Классификация проективных и аффинных квадрик над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. Квадрика Плюккера и грассманианы.

Комментарий: В курсах геометрии очень часто много времени тратится на вещи, которые никому и никогда потом не пригождаются. Это относится, например, к подробной теории конических сечений (эксцентриситеты, директрисы, центры, диаметры...), или к тонкостям из выпуклой геометрии и теории многогранников. Мы же предлагаем оставить в курсе в основном те геометрические сюжеты, которые будут востребованы на других предметах.

Геометрия Лобачевского отсутствует в силу того, что её значительно проще рассказывать после знакомства с дифференциальной геометрией и комплексным анализом, а на первом курсе её в последние годы никто не усваивает.

Топология (общая топология)

1. Метрические пространства, полнота, пополнение, p-адические числа. Проконечные группы. Нормированные пространства и кольца. *Метрика Хаусдорфа (на замкнутых подмножествах).

2. Топологические пространства. Открытые и замкнутые множества, замыкание, предельные, граничные, внутренние и т. д. точки. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы, примеры топологических пространств и гомеоморфизмов. Связность, линейная связность, компактность, их сохранения при непрерывных отображениях.

3. Аксиомы отделимости, топология на произведении и фактортопология. Теорема Тихонова. Компактно-открытая топология на пространстве отображений. Интерпретация в метрическом случае.

Анализ

1. Интеграл Римана, интегрируемость непрерывных функций. Простейшие свойства интеграла, «табличные» интегралы. Теорема о среднем. Теорема Лебега. Замена переменной, интегрирование по частям. Несобственные интегралы и их признаки сходимости.

2. Формула суммирования Абеля. Следствия: асимптотика гармонического ряда и константа Эйлера — Маскерони, ускорение сходимости ряда обратных квадратов (и вообще, обратных степеней).

3. Начала многомерного анализа: дифференциал, частные производные. Принцип сжимающих отображений, теорема об обратном отображении, теорема о неявной функции. Формула Тейлора для функции многих переменных.

4. Подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, векторные поля, касательное и кокасательное пространства.

I.4 Четвёртый модуль

Алгебра

1. Теория категорий. Определения и многочисленные примеры категорий и функторов, естественные преобразования, представимые функторы, лемма Ионеды. Эквивалентности категорий, сопряжённые функторы, пределы и копределы диаграмм, (ко)произведения и (ко)уравнители, определение объектов универсальными свойствами, многочисленные примеры.

2. Введение в теорию представлений. Пространства с операторами, приводимость, разложимость и вполне приводимость, лемма Шура. Повторение: представления одноточечного множества (пространство с одним оператором), коммутирующие операторы над алгебраически замкнутым полем. Инвариантные проекторы, инвариантные скалярные произведения. Теорема о двойном централизаторе (теорема плотности) и теорема Бёрнсайда (над алгебраически замкнутым полем неприводимые конечномерные представления ассоциативных алгебр эпиморфны).

3. Представления конечных групп. Представления конечных абелевых групп, характеры абелевых групп. Полная приводимость представлений конечных групп. Групповая алгебра, разложение групповой алгебры в прямую сумму эндоморфизмов неприводимых представлений. Соотношения на число и размерности неприводимых представлений. Базисные идемпотенты, преобразование Фурье на конечной группе и теория характеров. Кольцо представлений. Тензорное произведение алгебр, ограничение и индуцирование, структура индуцированного представления группы, двойственность Фробениуса.

Комментарий: Теория категорий здесь стоит для того, чтобы начиная с этого момента, лекторы на других предметах (в основном, конечно, на топологии), могли с чистой совестью произносить слова «категория» и «функтор». Освоение этого языка видится нам очень важной частью обязательной программы, которая, почему-то, игнорировалась в последние годы (хотя соответствующий пункт есть даже в нынешней программе-минимум).

В принципе, начиная с этого момента, модули алгебры не очень опираются друг на друга. Теорию Галуа, теорию представлений и основы коммутативной алгебры можно рассказывать в разном порядке. Мы здесь выбрали теорию представлений, так как она может послужить хорошим примером использования недавно изученных средств линейной алгебры, особенно тензорных произведений.

Отсутствие здесь представлений симметрических групп и групп и алгебр Ли не случайно. Нам кажется, что первая тема слишком сложна и специальна для базового курса, а вторая заслуживает полноценного отдельного курса и не стоит включать лишь отдельные её элементы.

Топология

1. Операции с топологическими пространствами: букет, конус, произведение (с доказательством, что $\mathrm{Hom}(X \times Y, Z) = \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z))$, где с обеих сторон пространства с компактно-открытой топологией). *Смэш-произведение как аналог произведения с отмеченной точкой. Пространства петель и надстройка, их сопряжённость. Определение гомотопических групп (π_0 от кратного пространства петель). Их явная интерпретация как отображения из сфер с точностью до гомотопии, описание групповой операции в этих терминах, коммутативность старших.

2. Изучение π_1: $\pi_1(S^1)$ со стандартными следствиями. Накрытия, подъём гомотопии в накрытие существует и единственен, существование универсального накрытия и соответствие между подгруппами в π_1 и накрытиями для локально односвязных пространств. π_1 от топологической группы коммутативно.

3. Локально тривиальные расслоения, примеры: топологическая группа и стабилизатор транзитивного действия, тавтологические векторные расслоения на грассманианах, расслоение Хопфа. *Без доказательства: любое векторное расслоение над паракомпактной базой есть обратный образ тавтологического расслоения над грассманианом. Длинная точная последовательность расслоения. Следствия: $\pi_3(S^2)$, некоторые гомотопические группы классических групп.

Комментарий: большая проблема нашего варианта курса топологии заключается в том, что содержание этого модуля обычно излагалось в начале второго курса, а не в конце первого. Поэтому материал может оказаться слишком абстрактным и техничным для студентов. Тем не менее, общая программа трех модулей выглядит достижимой. При необходимости можно сократить программу третьего модуля, уделив больше внимания фундаментальному материалу двух первых. Сам же этот модуль просто содержит основные факты о гомотопических группах, а также знакомит студентов с понятием расслоения, что полезно сделать как можно раньше.

Анализ

1. Многомерное дифференцирование (продолжение). Метод множителей Лагранжа. Лемма Морса, лемма Сарда.

2. Лемма Адамара, дифференцирования гладких функций порождены частными производными. Однопараметрические группы диффеоморфизмов, их свзяь с дифференциальными уравнениями и векторными полями, теорема Пикара — Линделёфа. Простейшие примеры дифференциальных уравнений.

3. Многомерное интегрирование. Кратные и повторные интегралы, теорема Фубини. Объёмы, замена переменной, ориентация, площадь поверхности.

Логика

1. Исчисление высказываний. Формулы и теории 1-го порядка. Модели и общезначимость. Теоремы Гёделя. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Перечислимость и разрешимость (материал нынешнего второго модуля).

II Второй курс

II.1 Первый модуль

Алгебра (Основы коммутативной алгебры)

1. Простые и максимальные идеалы, идеалы в факторкольце. Нильрадикал и радикал Джекобсона. Спектр кольца как топологическое пространство. Спектр квазикомпактен.

2. Модули над кольцами, расщепимые точные тройки, тензорное произведение модулей, замена базы. Точные, точные слева и точные справа функторы между категориями модулей. Точность тензорного произведения справа и Hom слева как формальное следствие сопряженности функторов. Тензорное произведение колец с единицей как копроизведение в категории колец (= расслоенные произведения спектров).

3. Локальные кольца, лемма Накаямы.

4. Проективные и инъективные модули. Проективные модули это прямые слагаемые свободных, примеры проективных не свободных модулей из геометрии и теории чисел. Над локальным кольцом конечно порождённый проективный свободен.

5. Локализация колец и модулей. Простые идеалы в локализации (главные открытые множества спектров это спектры локализаций основного исходного кольца). Последовательность модулей точна $\Leftrightarrow$ локализации по всем максимальным идеалам точны.

6. Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе, подмодуль конечно порождённого модуля над нётеровым кольцом конечно порождён, теорема Гильберта о нулях.

Комментарий: целью глубокого изучения коммутативной алгебры обычно является (схемная) алгебраическая геометрия или алгебраическая теория чисел. Однако базовые утверждения и подходы к их доказательствам могут быть полезны во многих разделах математики. Помимо этой благородной цели у данного курса есть и другие: например, при наличии обязательного ликбеза по коммутативной алгебре существующий спецкурс по ней сможет стать более полноценным. Сейчас из-за нехватки времени в нём (практически) не изучаются регулярные кольца и свойства кэлеровых дифференциалов, крайне важные для алгебраической геометрии; дедекиндовы кольца, необходимые в теории чисел; пополнения, важные для обеих областей. Кроме того, подробное изучение модулей и всевозможных функторов, связанных с ними, дает массу примеров для спецкурса по гомологической алгебре.

Анализ (анализ на многообразиях)

1. Категория гладких многообразий. Примеры. Гладкие отображения. Подмногообразия. Напоминание: теорема о неявной функции, подмногообразия в $\mathbb{R}^n$.

2. Касательное расслоение. Напоминание о векторных расслоениях. Разные определения касательного расслоения (классы путей, дифференцирования, фактор идеала точки по своему квадрату) и их эквивалентность. Потоки диффеоморфизмов и теорема Пикара — Линделёфа на многообразиях, интегральные кривые. Производная Ли векторного поля вдоль векторного поля, коммутатор векторных полей. *Распределения и теорема Фробениуса.

Комментарий: Анализ на многообразиях критически важен для понимания курсов дифференциальных уравнений (векторные поля), векторного анализа (формула Стокса), механики (многообразия как примеры конфигурационных пространств) и комплексного анализа (дифференциальные формы, формула Стокса). Сейчас содержание этого курса излагается с большими пробелами и в основном в самом конце, что порождает большие трудности с пониманием всех аналитических предметов на втором курсе. Мы считаем весьма удачным то, как с этим материалам обходятся каждый год в НМУ, и наша программа практически полностью заимствована оттуда. Для того, чтобы была возможность рассказывать несколько медленнее и подробнее, мы убрали из неё упоминание трансверсальности, а распределения и теорему Фробениуса поместили в качестве необязательной темы. Дифференциальные уравнения и механика, соответственно, перемещены нами во второй семестр, чтобы при их изложении анализ на многообразиях мог полноценно использоваться.

Топология

1. CW-комплексы, лемма Борсука, теорема о клеточной аппроксимации (следствие: π_k зависит только от $(k+1)$-мерного остова). Теорема Уайтхеда. Без доказательства: любое многообразие (как раз должны были успеть определить на анализе) является CW-комплексом, пространства петель гомотопически эквивалентны CW-комплексами. Теорема о поднятии гомотопии для локально тривиального расслоения над CW-комплексом.

2. Сингулярные гомологии и когомологии, их гомотопическая инвариантность, точная последовательность вырезания и Майера — Виеториса. Параллельно с этим введение в гомологическую алгебру: цепные комплексы, квазиизоморфизмы, гомотопии отображений, длинная точная последовательность когомологий короткой точной последовательности комплексов. Гомологии сферы.

3. Теорема Гуревича (через теорему Фрейденталя). Следствие: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Комментарий: рассказывать про CW-комплексы в самом начале курса топологии, как это зачастую делается в НМУ, кажется не самой лучшей идеей. До формулировки теоремы Уайтхеда и теоремы о поднятии гомотопии вся мотивация для этого определения сводится к тому, что нужно как-нибудь отбросить патологические топологические пространства, и почему бы не таким образом. Здесь же они вполне уместны. Теорема Гуревича обычно доказывается с использованием равенства $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (которое часто делается через степень отображения многообразий). Вполне можно использовать и такое доказательство. Теорема Фрейденталя важна для дальнейшего изучения топологии, но может занять больше времени.

Теория меры

1. Алгебры и сигма-алгебры подмножеств. Классы борелевских множеств.

2. Меры. Теорема о продолжении меры. Прямое произведение мер.

3. Меры на $\mathbb{R}$: конструкции мер Жордана и Лебега.

4. Измеримые отображения, прямой образ меры.

5. Интегрируемые функции, интеграл Лебега, предельные теоремы Лебега, Фату, Леви.

*$5\frac{1}{2}$. Основы эргодической теории: теорема Пуанкаре о возвращении, эргодические динамические системы (с примерами в листках), простейшие критерии эргодичности, эргодическая теорема Биркгофа (формулировка).

6. Теорема Фубини.

Комментарий: Курс анализа разделён на три части: теория меры, анализ на многообразиях и начала функционального анализа. Такое разделение преследует две цели: систематизацию материала из стандартного курса анализа за второй год и сокращение времени, отведённого на аналитические предметы. Сокращение времени получается, в основном, за счет объединения идейно близкого (по крайней мере в 3-м семестре) курса динамических систем с курсом анализа на многообразиях. Кроме того, выделение теории меры в отдельный курс позволит частично соединить её со спущенным из пятого семестра курсом теории вероятностей.

II.2 Второй модуль

Алгебра

1. Теория Галуа. Присоединение корня. Алгебраическое замыкание и поле разложения. Башни расширений, лемма о примитивном элементе. Продолжение гомоморфизмов, нормальность, сепарабельность. Группа Галуа, расширения Галуа, соответствие Галуа. Вычисление групп Галуа при помощи арифметической редукции. Циклические и разрешимые расширения. Построения циркулем и линейкой и разрешимость уравнений в радикалах, теорема Абеля — Руффини. Основная теорема алгебры. Теорема о линейной независимости характеров.

Анализ (анализ на многообразиях)

1. Операции над векторными расслоениями. Прямая сумма, тензорное произведение, симметрическая и внешняя степень. Кокасательное расслоение.

2. Дифференциальные формы. Обратный образ, ориентация многообразия, многообразия с краем, интегрирование форм, теорема Стокса и лемма Пуанкаре. Производная Ли, тождество Картана. Вывод из формулы Стокса классических формул векторного анализа. Градиент, ротор, дивергенция. Комплекс де Рама и его когомологии.

Топология

1. Клеточные гомологии и когомологии. Набросок доказательства изоморфизма с сингулярными (например, доказать для двумерного CW-комплекса). Примеры вычислений клеточных (ко)гомологий.

2. Умножение в когомологиях. Вычисление кольца когомологий $\mathbb{C}P^n$, тора.

3. Двойственность Пуанкаре (без теории Морса; например, следуя книжке Милнора и Сташефа). *Индекс пересечения трансверсальных подмногообразий вычисляет умножение в когомологиях.

4. Формула Кюннета над полем и для пространств без кручения в когомологиях.

5. Теорема Лефшеца о неподвижной точке, ее следствия.

Комментарий: для вычислений полезно знать, что сингулярные когомологии совпадают с клеточными. Строгое доказательство этого факта, доступное для второкурсников (т.е. без спектральной последовательности для фильтрации по остовам), слишком технично, чтобы рассказывать его полностью. При нехватке времени можно смело сокращать четвёртую и пятую тему. От этого три модуля нашего варианта топологии будут практически в точности соответствовать нынешней программе для двух модулей. Это не плохо, потому что сейчас из-за нехватки времени часто опускают какие-то темы и поверхностно проходят другие, а три модуля позволят рассказывать более понятно.

Теория меры и теория вероятностей

1. Меры Лебега — Стилтьеса, абсолютно непрерывные, дискретные и сингулярные меры.

2. Теорема Радона — Никодима, разложения Хана и Жордана.

3. Вероятностные пространства. Независимые события, относительная вероятность. Формула полной вероятности, формула Байеса.

4. Случайные величины, независимость сигма-алгебр, независимость случайных величин.

5. Слабая сходимость мер, сходимость по распределению и другие виды сходимости. *Теорема Александрова.

Комментарий: В нашей программе анализ разделён на несколько отдельно преподаваемых тем. Благодаря этому на втором курсе появилось время для того, чтобы спустить туда большую часть первого семестра теории вероятностей. При этом на третьем курсе уже не будет ни одного обязательного предмета. Мы не включили в нашу программу математическую статистику. На это есть две основные причины. Во-первых, часть про математическую статистику почти никто не воспринимает. А во-вторых, она кажется нам слишком специализированной для обязательной программы.

II.3 Третий модуль

Замечание: в третьем и четвёртом модулях остаётся незанятое время. Возможно, было бы уместно предложить студентам выбрать в этом семестре дополнительную пару НИС+спецкурс (это позволило бы, в частности, студентам, расположенным к алгебре, посещать не только аналитические предметы). Как пример спецкурса, который можно читать второкурсникам, можно предложить курс о математической механике (исключенной из программы дифференциальных уравнений) или введение в гомологическую алгебру.

Комплексный анализ

1. Голоморфные функции, уравнения Коши — Римана. Голоморфные функции в многомерии, комплексные многообразия (определение), почти комплексные структуры. Конформность голоморфных отображений.

2. Интегрирование по кривым. Неравенство Коши, теорема Лиувилля. Разложение голоморфной функции в ряд, интегральная теорема Коши. Теорема о среднем, принцип максимума, лемма Шварца. Теорема Римана об устранимой особенности. Мероморфные функции, ряды Лорана, лемма Казорати — Сохоцкого. Мероморфные дифференциальные формы, их вычеты, интегральная формула Коши. Взятие интегралов при помощи вычетов, гамма-функция.

3. Гармонические функции, аналитичность гармонических функций. Формула Пуассона, задача Дирихле. Аналитическое продолжение, определение римановых поверхностей. Римановы поверхности суть комплексные кривые.

Теория вероятностей

1. Непрерывные распределения, плотности, классические примеры.

2. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция.

3. Характеристические функции. Теорема Леви о непрерывности.

4. Предельные теоремы теории вероятностей (ЗБЧ, УЗБЧ, ЦПТ).

5. Частные случаи предельных теорем: формула Муавра — Лапласа (+ локальный вариант), распределение Пуассона.

*6. Марковские цепи, инвариантные распределения, слабо эргодические и эргодические цепи Маркова.

Дифференциальные уравнения

1. Основные определения: система дифференциальных уравнений (автономная, разрешённая относительно производных), решение системы дифференциальных уравнений, линии уровня, первый интеграл.

2. Первые примеры: разделяющиеся переменные, однородные уравнения, решение неоднородных методом вариации постоянных.

3. Неавтономные системы уравнений, не разрешённые относительно производных системы уравнений, уравнения n-того порядка. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений, их решение, связь между уравнениями n-того порядка и системами из n линейных однородных уравнений.

4. Уравнения в полных дифференциалах (с интерпретацией через дифференциальные формы).

5. Векторное поле задаёт систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема Пикара-Линделёфа (повторение).

6. Теорема о выпрямлении векторного поля. Особенности векторных полей на плоскости, дифференцируемая и топологическая эквивалентности векторных полей.

Комментарий: этот модуль похож на то, что обычно обсуждается в этом курсе сейчас. Основным изменением является исчезновение лагранжевой и гамильтоновой механики, а также элементов дифференциальной геометрии. У текущих студентов об этих темах зачастую почти не остается воспоминаний, а в соответствующих курсах по выбору рассказывают всё с нуля. В случае с механикой, одна из причин — более «физическое» изложение, чем привычный стиль лекций. Безусловно, матфизика очень сильно влияет на современную математику, и некоторым студентам понадобится когда-нибудь работать с идеями, пришедшими из физики. Тем не менее, нам кажется вполне приемлемым отложить механику целиком для курса по выбору. Про дифференциальную геометрию на втором курсе рассказать обычно успевают слишком мало: обстоятельный рассказ про связности в векторных расслоениях в курс не помещается, а без этого в таком курсе нет особого смысла. «Классическая дифференциальная геометрия» (кривые и поверхности в пространстве, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы и т.п.) — тема, студентами нелюбимая и, на наш взгляд, абсолютно неоправданно присутствующая сейчас в курсе динамических систем.

Важным моментом также является то, что курс стоит после семестра анализа на многообразиях. Знакомство с векторными полями и дифференциальными формами должно сильно упростить понимание происходящего.

II.4 Четвёртый модуль

Комплексный анализ

1. Нормальные семейства, лемма Монтеля. Теорема Римана об отображении. Теорема Пикара.
2. Эллиптические кривые. Теорема о трёх кубиках, теорема Паскаля как частный случай. Дивизоры, группа классов дивизоров, сложение точек. Функция Вейерштрасса, отображение Абеля — Якоби.
3. Теорема Вейерштрасса о бесконечном произведении. Теорема Миттаг-Леффлера, *проблемы Кузена, пучки голоморфных функций, когомологии Чеха.

Введение в функциональный анализ

1. Нормированные и преднормированные пространства. Естественные примеры (пространства $L^p(X,\mu)$, $C^m(X)$, $C_0(X)$ (зануляющиеся на бесконечности с sup-нормой), S и D (шварцевские и с компактным носителем)).
2. Банаховы и гильбертовы пространства, дополняемость, пополнения разных неполных пространств. *Теорема Стоуна — Вейерштрасса в общем виде.
3. Теорема Риса — Фреше и пара слов об обобщённых функциях.
4. Разные сорта базисов в гильбертовых пространствах. Доказательство того, что экспоненты — базис в $L^2[0,1]$. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля (и следствия).
5. Ряды Фурье, лемма Римана — Лебега, оценки на рост коэффициентов функций с ограниченной вариацией, несколько раз дифференцируемых и продолжимых до голоморфных.
6. Локально компактные группы, меры Хаара. *Двойственность Понтрягина.

*7. Примеры самодвойственных групп, преобразования Фурье как преобразования Гельфанда соответствующих алгебр функций. Двойственная мера.

Компьютерные вычисления

1. Нынешний курс без изменений.